

《数学大观》  
十六、《张丘建算经》  
和百鸡问题

主讲人：青课





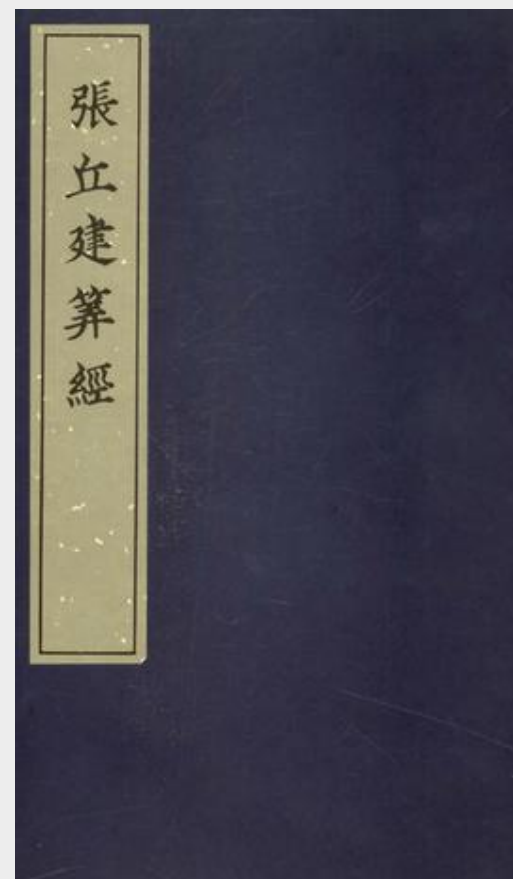
张丘建，北魏时清河（今山东临清一带）人，生平不详。

著有《张丘建算经》三卷，据钱宝琮考，约成书于北魏献文帝期间（公元466~485）。



《张丘建算经》全书现存92题，其中的突出贡献是有了求**最小公倍数**的方法，创造了计算**等差级数**各元素的公式。

张丘建把等差数列的研究向前进了一步，其中的等差数列问题更为复杂，解法也更加丰富多彩。



如《张丘建算经》卷上第22题为：

今有女善织，日益功疾。初日织五尺，今一月织九匹三丈。问日益几何？”

术文是：“置今织尺数，以一月日而一，所得，倍之。又倍初日尺数，减之，余为实。以一月日数，初一日减之为法，实如法而一。

令“今织尺数”为 $S_n$ ，“一月日数”为 $n$ ，“初日尺数”为 $a_1$ ，“日益数”为 $d$ ，则有：

$$d = \frac{2 \frac{S_n}{n} - 2 a_1}{n - 1}$$



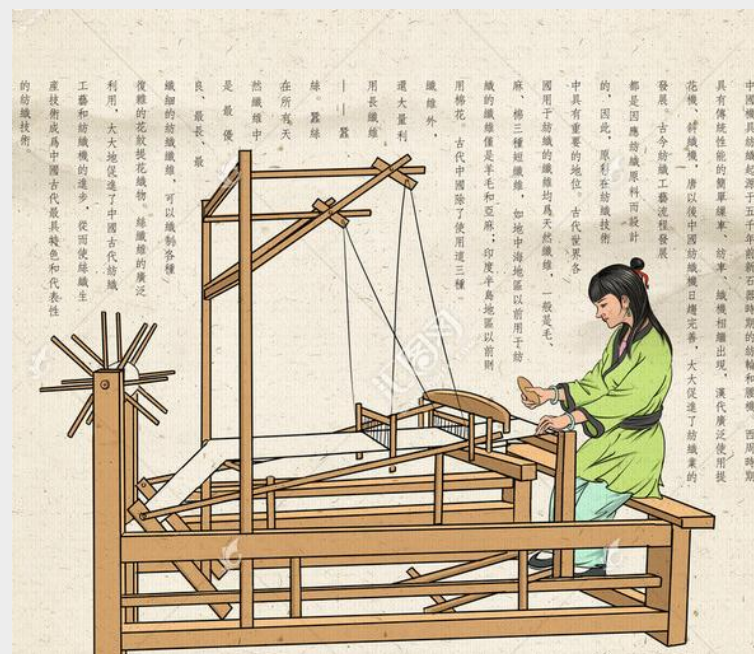
## 《张丘建算经》卷上第23题为：

今有女不善织，日减功迟。初日织五尺，末日织一尺，今三十日织讫。问织几何？”

术文是：“并初，末织尺数，半之。余以乘织讫日数，即得。”

也就是：
$$S_n = \frac{a_n - a_1}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_n - a_1}{2} \cdot n$$





《张丘建算经》卷下第36题为：

今有人举取他绢，重作券，要过限一日息绢一尺，二日息二尺，如是息绢日多一尺，今过限一百日。问息绢几何？术文是：“并一百日，一日息，以乘百日而半之，即得。”

此题是上题的特例，首项公差别皆为1，术文相当于给出前n项。

$$\text{自然数的公式： } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

《张丘建算经》卷下最后一问是百鸡问题，为著名的不定方程问题，影响极大。

今有鸡翁一直钱五，鸡母一直钱三，鸡雏三直钱一，  
凡百钱买鸡百只，问鸡翁、母、雏各几何？



设鸡翁、鸡母、鸡雏各为 $x$ ， $y$ ， $z$ ，则可以列出方程（组）：

$$\begin{cases} x + y + z = 100 & (1) \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 & (2) \end{cases}$$

《张丘建算经》认识到这是一个不定问题，并给出了(4, 18, 78), (8, 11, 81), (12, 4, 84)三组解，是其全部正整数解。







《张丘建算经》提示了解法：

术曰：鸡翁每增四，鸡母每减七，鸡雏每益三，即得。

数学史家钱宝琮先生的理解是：

以3乘第（2）式，减第（1）式，化成  $7x + 4y = 100$ ，其中

$4y$ 与100都是4的倍数，

因此 $x$ 应是4的倍数：

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 25 - 7t \\ z = 75 + 3t \end{cases}$$



令  $t=1, 2, 3$ , 则  $x=4, 8, 12$ ,  $y=18, 11, 4$ ,  $z=78, 81, 84$ 。因为正数解, 故  $x$  不能为 0 或负数, 也不能大于 12, 只能有以下三组解:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 18 \\ z = 78 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 8 \\ y = 11 \\ z = 81 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 12 \\ y = 4 \\ z = 84 \end{array} \right.$$

后来人们一直未找到鸡问题的一般解法。直到19世纪中叶，宋元数学复兴之后，骆腾凤《艺游录》、时曰醇《百鸡术衍》用大衍求一术求解，才找到一般解法。



“百鸡术”是世界著名的不定方程问题。

“百鸡问题”对阿拉伯、欧洲数学产生了巨大影响。13世纪意大利斐波那契的《算法之书》，15世纪阿拉伯的阿尔·卡西的《算术之钥》均出现有相同的问题“百鸡问题”，显然源于中国。



感谢聆听

